

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ
ИНТЕГРАЛА АДАМАРА
НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ**

*Методические указания
к курсовой работе*

Пенза
Издательство
Пензенского государственного
Университета
2007

УДК 517
Д57

:

Рассматривается выполнение курсовой работы по конкретной теме дисциплины «Квадратурные формулы». Предлагаются темы курсовых работ (приложение А). Даны контрольные вопросы к экзаменам (приложение Б) и программа курса.

Методические указания подготовлены на кафедре «Высшая и прикладная математика».

С о с т а в и т е л ь Н.Ф. Добрынина

Р е ц е н з е н т А.А. Ловков, кандидат физико-математических наук,
заведующий кафедрой «Алгебра» Пензенского
государственного педагогического университета
им. В.Г. Белинского

Постановка задачи

В ходе данной работы необходимо ознакомиться с приближенными методами вычисления интегралов Адамара и посредством реализации эффективного метода вычисления интеграла Адамара на конечном интервале определить значения исходных интегралов

$$\int_{-1}^1 \frac{-e^{-|\tau|} \cos \tau}{(\tau - 0,5)^2} d\tau, \quad \int_{-1}^1 \frac{e^{-\tau^2} \sin \tau}{(\tau - 0,7)^4} d\tau.$$

Теоретическая часть

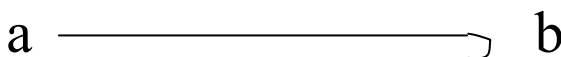
1. Определение интеграла Адамара

Определение 1. Интеграл вида

$$\int_a^b \frac{A(x) dx}{(b-x)^{p+\alpha}} \quad (1)$$

при целом p и $0 < \alpha < 1$ определяет величину («конечную часть») рассматриваемого интеграла:

- 1) как половину соответствующего интеграла вдоль контура $[a, b]$, если $A(x)$ - аналитическая функция;



- 2) как предел при $x \rightarrow b$ суммы

$$\int_a^x \frac{A(t) dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}},$$

если предположить, что $A(x)$ имеет p производных в окрестности точки b . Здесь $B(x)$ - любая функция, на которую налагаются два условия:

- рассматриваемый предел существует;
- $B(x)$ имеет, по крайней мере, p производных в окрестности точки $x = b$.

Произвольный выбор $B(x)$ никак не влияет на значение получаемого предела: 1-е условие определяет значения $p-1$ первых производных от $B(x)$ в точке b , так что произвольный добавочный член в числителе есть бесконечно малая величина, по меньшей мере порядка $(b-x)^p$.

Ж. Адамар назвал этот предел «конечной частью» интеграла и обозначил

$$\overline{\int_a^b \frac{A(x) dx}{(b-x)^{p+\alpha}}}.$$

Знак $\overline{\int}$ означает конечную часть интеграла. В современной литературе чаще встречается другое обозначение интеграла Адамара:

$$\int_a^b \frac{A(x) dx}{(b-x)^{p+\alpha}}$$

(в данной работе используется это обозначение).

Один из способов вычисления интеграла Адамара заключается в следующем. Представим интеграл (1) в виде

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b \frac{A(x) dx}{(b-x)^{p+\alpha}}} &= \int_a^b \frac{A_1(x) dx}{(b-x)^{p+\alpha}} + \\ &+ \overline{\int_a^b \left[A(b) + \frac{A'(b)}{1!}(x-b) + \dots + \frac{A^{(p-1)}(b)(x-b)^{p-1}}{(p-1)!} \right] \frac{dx}{(b-x)^{p+\alpha}}}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{где } A_1(x) = A(x) - A(b) - \frac{A'(b)}{1!}(x-b) - \dots - \frac{A^{(p-1)}(b)(x-b)^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Вычисляя второй из интегралов, стоящих в правой части формулы (2) по определению 1, в котором

$$B(x) = \frac{A(b)}{p+\alpha-1} - \frac{A'(b)(b-x)}{(p+\alpha-2)1!} + \dots + \frac{(-1)^{p-1} A^{(p-1)}(b)(b-x)^{p-1}}{\alpha(p-1)!},$$

имеем

$$\overline{\int_a^b \frac{A(x) dx}{(b-x)^{p+\alpha}}} = -\frac{A(b)}{(p+\alpha-1)(b-a)^{p+\alpha-1}} - \dots - \frac{(-1)^{p-1} A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!\alpha(b-a)^\alpha} \cdot \int_a^b \frac{A_1(x) dx}{(b-x)^{p+\alpha}}.$$

Данное Адамаром определение конечной части расходящегося интеграла является частным случаем общего понятия регуляризации расходящихся интегралов.

Определение 2. Множество K всех вещественных функций $\varphi(x)$ ($x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$), каждая из которых имеет непрерывные производные всех порядков, и финитна, т.е. обращается в нуль вне некоторой ограниченной области, называется основным пространством. Сами функции $\varphi(x)$ называются основными.

Определение 3. Линейный непрерывный функционал f задан на основном пространстве K , если указано правило, в силу которого каждой основной функции $\varphi(x)$ сопоставлено некоторое число (f, φ) и при этом выполнены следующие условия:

а) для любых двух вещественных чисел α_1, α_2 и любых двух основных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ имеет место равенство $(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2)$;

б) если последовательность основных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ стремится к нулю в пространстве K , то последовательность чисел $(f, \varphi_1), \dots, (f, \varphi_n), \dots$ сходится к нулю.

Если $f(x)$ локально интегрируемая в R_n , то с ее помощью можно каждой основной функции $\varphi(x)$ поставить в соответствие число

$$(f, \varphi) = \int_{R_n} f(x)\varphi(x) dx. \quad (3)$$

Легко видеть, что выражение (3) является линейным функционалом. Известно, что не все линейные функционалы представимы в виде (3).

Линейные функционалы, представимые в виде (3), называются регулярными, все остальные – сингулярными.

Пусть $f(x)$ – функция, локально интегрируемая всюду, кроме точки x_0 . В этой точке она имеет неинтегрируемую особенность. Тогда интеграл (3), где $\varphi(x)$ – основная функция, вообще говоря, расходится. Но он сходится, если $\varphi(x)$ равна нулю в окрестности точки x_0 . Ставится вопрос, нельзя ли доопределить возникающий при этом функционал, т.е. построить

функционал $f \in K'$, который на основные функции $\varphi(x)$, равные нулю в окрестности точки x_0 действует по формуле (3). Всякий такой функционал f называется регуляризацией расходящегося интеграла (1.1.3) или регуляризацией функции $f(x)$

Остановимся на проблеме регуляризации функции со степенными особенностями, так как интеграл в смысле Адамара введен для интегрирования таких функций.

Пусть $f(x)$ - функция со степенной особенностью в точке $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, причем функция $f(x) = r^m$ локально интегрируема. Здесь

$$r = \left[\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0)^2 \right]^{1/2}.$$

Предложим следующую регуляризацию степенных функций:

$$(f, \varphi) = \int_{R_n} f(x) \left\{ \varphi(x) - \left[\varphi(0) + \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial^m \varphi(0)}{\partial x_n^m} \frac{x_n^m}{m!} \right] e(1-r) \right\} dx, \quad (4)$$

где для простоты полагается, что особая точка $x_0 = 0$, функция

$$e(1-r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r < 1, \\ 0 & \text{при } r = 1. \end{cases}$$

Сравнивая результаты регуляризации функции $f(x)$ со степенной особенностью, проведенной по формуле (4) при $n=1$, и результаты непосредственного вычисления интеграла Адамара по формуле (2), легко убедиться, что они отличаются на константу.

Теорема 1.1.1. [17] Если f_0 - частное решение проблемы регуляризации интеграла (1.1.3), то общее решение f получается прибавлением к f_0 любого функционала, сосредоточенного в точке x_0 .

Рассмотрим интеграл

$$A\varphi = \int_0^\infty \varphi(\tau) \tau^{\lambda-2} d\tau,$$

где $1 < \lambda < 2$, а функция $\varphi(\tau) = \left(1 - \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau} \right)^{-\mu}$, $\varphi_1(\tau)$ - ограниченная функция,

$\mu > 0$.

Очевидно, что интеграл $A\varphi$ не существует в смысле Римана и необходимо проведение регуляризации.

Регуляризация интеграла $A\varphi$ проводится следующим образом. Вначале доказывается, что интеграл

$$\int_0^{\infty} \tau^{\mu} d\tau = 0 \quad (5)$$

при любом μ . В самом деле

$$\int_0^{\infty} \tau^{\mu} d\tau = \int_0^a \tau^{\mu} d\tau + \int_a^{\infty} \tau^{\mu} d\tau. \quad (6)$$

При условии $\operatorname{Re} \mu > -1$ первый интеграл существует и равен $\frac{a^{\mu+1}}{\mu+1}$. Полученная функция является аналитической во всей комплексной плоскости, исключая точку $\mu = -1$. Вторым интеграл существует при условии $\operatorname{Re} \mu < -1$ и равен $\frac{-a^{\mu+1}}{\mu+1}$. Он также является аналитической функцией во всей комплексной плоскости за исключением точки $\mu = -1$. Продолжая интегралы из правой части формулы (6) на всю комплексную плоскость, доказываем (5). Тогда регуляризация осуществляется формулой

$$\int_0^{\infty} \varphi(\tau) \tau^{\lambda-2} d\tau = \int_0^{\infty} (\varphi(\tau) - 1) \tau^{\lambda-2} d\tau.$$

Нетрудно видеть, что последний интеграл существует. Аналогичным образом осуществляется переход к большим значениям λ .

Л.А. Чикин дает определение интеграла типа Коши-Адамара, обобщающее понятия интеграла в смысле главного значения Коши и интеграла Адамара.

Определение 4. Интегралом

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p}, \quad a < c < b,$$

в смысле главного значения Коши-Адамара будет следующий предел:

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{\nu \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\nu} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p} + \int_{c+\nu}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p} + \frac{\xi(\nu)}{(\tau-c)^{p-1}} \right],$$

где $\xi(\nu)$ - некоторая функция, выбранная так, чтобы указанный предел существовал.

2. Постановка задачи построения оптимальной квадратурной формулы

В 1958 году вышла книга С.М. Никольского «Квадратурные формулы», которая привлекла внимание математиков к построению оптимальных квадратурных формул. Различные подходы к построению оптимальных квадратурных формул предложены Н.С. Бахваловым, В.И. Крыловым, С.М.Никольским, С.Л. Соболевым. Оптимальные весовые кубатурные формулы исследованы В.И. Бойковым.

Формулировка задачи построения оптимальных квадратурных формул в применении к интегралам Адамара принадлежит А.Н. Колмогорову и заключается в следующем. Рассмотрим интеграл

$$A\varphi = \int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p}, \quad p - \text{целое}, \quad (7)$$

который будем вычислять по квадратурной формуле

$$A\varphi = \sum_{k=1}^N \varphi(s_k) p_k(t) + R_N(t, s_k, p_k, \varphi) \quad (8)$$

с узлами s_k и весами $p_k(t) (k=1, 2, \dots, N)$.

Под погрешностью квадратурной формулы (8) будем понимать величину

$$R_N(s_k, p_k, \varphi) = \max_t |R_N(t, s_k, p_k(t), \varphi)|.$$

Если M – некоторый класс заданных на отрезке $[a, b]$ функций, то положим

$$R_N(s_k, p_k, M) = \sup_{\varphi \in M} |R_N(s_k, p_k, \varphi)|.$$

Через $\xi_N [M]$ обозначим величину

$$\xi_N [M] = \inf_{(s_k, p_k)} R_N (s_k, p_k, M),$$

в которой нижняя грань берется по всевозможным N узлам s_k и весам $p_k(t) (k=1, 2, \dots, N)$. Квадратурную формулу (8), построенную на узлах s_k^* и весах $p_k^*(t) (k=1, 2, \dots, N)$, будем называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если

$$\frac{R_N (s_k^*, p_k^*(t), M)}{\xi_N [M]} = 1,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{R_N (s_k^*, p_k^*(t), M)}{\xi_N [M]} = 1,$$

$$R_N (s_k^*, p_k^*(t), M) \underset{\cap}{\cup} \xi_N [M],$$

соответственно. Знак $\underset{\cap}{\cup}$ (слабая эквивалентность) означает, что имеются две константы A и B ($0 < A, B < \infty$), не зависящие от N и такие, что

$$A \xi_N [M] < R_N (s_k^*, p_k^*, M) < B \xi_N [M].$$

Постановку задачи в случае многомерных интегралов опишем на примере двойного интеграла следующего вида:

$$I\varphi = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}} d\tau_1 d\tau_2. \quad (9)$$

Для вычисления этого интеграла будем использовать кубатурные формулы вида

$$I\varphi = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n p_{kl} (t_1, t_2) \varphi(x_k, y_l) + R_{mn} (t_1, t_2, x_k, y_l; p_{kl}, \varphi), \quad (10)$$

определяемые вектором $(x, y): a_1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b_1, a_2 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n \leq b_2$ и коэффициентами $p_{kl} (1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n)$.

Под погрешностью кубатурной формулы (10) будем понимать величину

$$R_{mn}(x_k, y_l; p_{kl}, \varphi) = \sup_{t_1, t_2} |R_{mn}(t_1, t_2; x_k, y_l; p_{kl}, \varphi)|.$$

Если M - некоторый класс заданных на прямоугольнике $[a_1, b_1; a_2, b_2]$ функций, то положим

$$R_{mn}(x_k, y_l; p_{kl}, M) = \sup_{\varphi \in M} |R_{mn}(x_k, y_l; p_{kl}, \varphi)|.$$

Через $\xi_{mn}[M]$ обозначим величину

$$\xi_{mn}[M] = \inf_{(x, y; p)} R_{mn}(x_k, y_l; p_{kl}, \varphi),$$

в которой нижняя грань берется по всевозможным векторам $(x, y; p)$ узлов и весов ($k=1, 2, \dots, N; l=1, 2, \dots, M$). Кубатурную формулу (10), построенную на векторах $(x_k^*, y_l^*; p_{kl}^*)$, будем называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если

$$\frac{R_{mn}(x_k^*, y_l^*; p_{kl}^*, M)}{\xi_{mn}[M]} = 1,$$

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \frac{R_{mn}(x_k^*, y_l^*; p_{kl}^*, M)}{\xi_{mn}[M]} = 1,$$

$$R_{mn}(x_k^*, y_l^*; p_{kl}^*, M) \underset{\cap}{\overset{\cup}{\approx}} \xi_{mn}[M].$$

Двойной интеграл (9) можно вычислить по кубатурной формуле

$$I\varphi = \sum_{k=1}^N p_{kl}(t_1, t_2) \varphi(M_k) + R_k(t_1, t_2, M_k, p_k, \varphi), \quad (11)$$

использующей N значений подынтегральной функции. Здесь $M_k = (\zeta_k, \eta_k)$ - узлы кубатурной формулы (11), причем характер расположения узлов в прямоугольнике $[a_1, b_1; a_2, b_2]$ произвольный.

Численные характеристики погрешностей определяются по формулам

$$R_N(M_k, p_k, \varphi) = \sup_{t_1, t_2} |R_N(t_1, t_2; M_k, p_k, \varphi)|$$

$$R_N(M_k; p_k, M) = \sup_{\varphi \in M} R_N(M_k, p_k, M),$$

$$\xi_N[M] = \inf_{(M_k, p_k, M)} R_N(M_k, p_k, M).$$

3. Классы функций

С.М. Никольский отмечает, что погрешность любой квадратурной формулы на всем классе интегрируемых функций равна бесконечности, и поэтому приходится проводить исследование квадратурных формул на узких классах функций. Ниже описываются классы функций, на которых исследуются алгоритмы вычисления интегралов Адамара.

Класс $W^r(M; a, b)$ состоит из функций, заданных на отрезке $[a, b]$ непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r -го порядка, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq M$.

В современном анализе широко используется класс функций Гельдера $H_\alpha(M; a, b)$ ($0 < \alpha \leq 1$), состоящий из заданных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого отрезка неравенству

$$|f(x') - f(x'')| \leq M |x' - x''|^\alpha.$$

Через $W^r H_\alpha(M; a, b)$ ($r = 1, 2, \dots; 0 < \alpha \leq 1$) обозначают класс функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[a, b]$ производные r -го порядка, удовлетворяющие условию

$$|f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x'')| \leq M |x' - x''|^\alpha$$

при любых x', x'' на $[a, b]$.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана неубывающая функция $\omega(x)$, удовлетворяющая условиям

$$\omega(0) = 0, \quad 0 < \omega(x_2) - \omega(x_1) \leq \omega(x_2 - x_1)$$

для всех x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) из $[a, b]$. Функция $\omega(x)$ называется модулем непрерывности.

Класс $W^r H_\omega(a, b)$ состоит из функций $f(x)$, заданных на $[a, b]$, имеющих на этом отрезке производные $f^{(r)}(x)$ порядка r и удовлетворяющих неравенству

$$|f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)| \leq \omega(x_2 - x_1).$$

Через $\tilde{W}^r H_\omega(a, b)$ обозначается класс периодических функций с периодом $(b - a)$, входящих в класс $W^r H_\omega(a, b)$.

Через $\tilde{W}^r(M; a, b)$ обозначается класс периодических функций с периодом $(b - a)$, входящих в класс $W^r(M; a, b)$.

Через $H^{\omega_1 \omega_2}(D)$ обозначается класс определенных на $D = (a \leq x \leq b; c \leq y \leq d)$ функций $f(x, y)$, таких, что для любых двух точек (x', y') и (x'', y'') из D

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq \omega_1(|x' - x''|) + \omega_2(|y' - y''|),$$

где $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)$ - заданные модули непрерывности.

Через $W_p^{r_1 r_2}(1)$ обозначен класс функций $\varphi(x, y)$, имеющих частные производные по переменным x и y до r_1 и r_2 порядка включительно, причем $\|\varphi^{(r_1, r_2)}\|_{L_p(D)} \leq 1$, $D = [a, b; c, d]$.

Если $\varphi \in W_p^{r_1 r_2}(1)$ и $\|\varphi^{(r_1, 0)}(x, 0)\|_{L_p(a, b)} \leq 1$, $\|\varphi^{(0, r_2)}(0, y)\|_{L_p(c, d)} \leq 1$, то $\varphi \in W_p^{*(r_1, r_2)}(1)$.

Через $\overline{W}^{r_1 r_2}(1)$ обозначен класс функций $\varphi(x, y)$, имеющих частные производные по переменным x и y до r_1 и r_2 порядка включительно, причем

$$\|\varphi^{(r_1,0)}(x,y)\|_C \leq 1, \quad \|\varphi^{(0,r_2)}(x,y)\|_C \leq 1, \quad \|\varphi^{(r_1,r_2)}(x,y)\|_C \leq 1.$$

Через $W_{L_p(D)}^r(1)$ обозначен класс функций, имеющих частные производные до r -го порядка включительно, ограниченные в метрике пространства $L_p(D)$ единицей, $D = [a, b; c, d]$.

Через $H_p(1)$ ($1 \leq p < \infty$) обозначается класс функций Харди, аналитических внутри единичной окружности γ с центром в начале координат с нормой

$$\|f\| = \left[\lim_{p \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(pe^{i\sigma})|^p d\sigma \right]^{\frac{1}{p}} \leq 1.$$

Обозначим через H_p^r ($r = 0, 1, \dots; 1 \leq p < \infty$) класс функций, аналитических внутри γ , имеющих производные до r -го порядка включительно на контуре γ и удовлетворяющих условию:

$$\lim_{p \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |f^{(r)}(pe^{i\sigma})|^p d\sigma \right]^{\frac{1}{p}} \leq 1 \quad \text{при } 1 \leq p < \infty,$$

$$\lim_{p \rightarrow 1-0} \sup_{0 \leq \sigma < 2\pi} |f^{(r)}(pe^{i\sigma})| \leq 1 \quad \text{при } p = \infty.$$

Обозначим через $H_p^{r,\alpha}(1)$ класс функций, входящих в класс $H_\infty^r(1)$ и удовлетворяющих на окружности γ дополнительному условию:

$$|f^{(r)}(t_1) - f^{(r)}(t_2)| \leq |t_1 - t_2|^\alpha.$$

Пусть $f(z_1, \dots, z_l) \in H_p^{r_1, \dots, r_l}(1)$ - функция l комплексных переменных, аналитических по каждой переменной z_i внутри единичной окружности γ_i , с центром в начале координат комплексной плоскости z_i ($i = 1, 2, \dots, l$).

Обозначим через D_i^+ область, расположенную внутри единичной окружности γ_i ($i = 1, 2, \dots, l$).

Будем говорить, что функция $f(z_1, \dots, z_l) \in H_p^{r_1, \dots, r_l}(1)$, если она по каждой переменной z_i имеет частные производные до r -го порядка включительно и удовлетворяет условию

$$\sup_{-1 \leq i \leq l} \sup_{(z_1, \dots, z_l) \in D} \lim_{p \rightarrow 1-0} \int_{\gamma_i} |f_i^r(z_1, \dots, z_{i-1}, pe^{i\sigma_i}, z_{i+1}, \dots, z_l)|^p d\sigma_i \leq 1,$$

где $D_k = D_k^+ \cup \gamma_k$.

4. Эффективный метод вычисления интеграла Адамара на конечном интервале

Рассмотрим функцию $\varphi(\tau)$, определенную на сегменте $[-1, 1]$, имеющую производные до r -го порядка включительно. Предположим, что функция $\varphi(\tau)$ задана на $[-1, 1]$ приближенными значениями $\tilde{\varphi}(\tau)$ такими, что $|\varphi(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau)| \leq \varepsilon$.

Для интеграла Адамара

$$A\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p} \quad (12)$$

построим квадратурную формулу следующего вида (2):

$$\begin{aligned} A\varphi = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\varphi}(t_k) \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{1}{[\tau - (t - ih)]^p} + \frac{1}{[\tau - (t + ih)]^p} \right) d\tau \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\varphi}(t'_j) \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{1}{[\tau - (t - ih)]^p} + \frac{1}{[\tau - (t + ih)]^p} \right) d\tau \right] + R_N, \end{aligned} \quad (13)$$

где $t_k = -1 + 2k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Сумма $\sum_{k=0}^{N-1}$ означает, что суммирование проводится при $k \neq j-1, j, j+1$; $t'_k = (t_k + t_{k+1})/2$, $h = N^{-1/p}$. Особая точка t находится внутри интервала $[-1 + \delta, 1 - \delta]$, где $\delta \gg h$.

Теорема. Пусть $\varphi(\tau) \in W^r(1)$ и $|\varphi(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau)| \leq \varepsilon$. Для интеграла Адамара (12) квадратурная формула (13) при $h = O(N^{-1/p})$ имеет погрешность $|R_N| \leq A \left(N^{-1/p} + \varepsilon N^{1-1/p} \right)$.

Доказательство. Представим интеграл Адамара (1) в виде суммы интегралов

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{t-\eta} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} + \int_{t+\eta}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} + \int_{t-\eta}^{t+\eta} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} \right].$$

Из определения интеграла Адамара следует, что

$$\begin{aligned} \int_{t-\eta}^{t+\eta} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} &= \frac{1}{(p-1)!} \int_{t-\eta}^{t+\eta} \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau-t} - \frac{1}{(p-1)! \eta} \left\{ \varphi^{(p-1)}(t+\eta) - (-1)^1 \varphi^{(p-1)}(t-\eta) \right\} - \\ &- \frac{2!}{(p-1)! \eta^2} \left\{ \varphi^{(p-2)}(t+\eta) - (-1)^2 \varphi^{(p-2)}(t-\eta) \right\} - \dots \\ &\dots - \frac{(p-2)!}{(p-1)! \eta^{p-1}} \left\{ \varphi(t+\eta) - (-1)^{p-1} \varphi(t-\eta) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Вычислив по частям интегралы:

$$\int_{-1}^{t-\eta} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} \quad \text{и} \quad \int_{t+\eta}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p}$$

и воспользовавшись формулой (14), получим:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} &= \frac{1}{(p-1)!} \int_{-1}^1 \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1!}{(p-1)!} \left\{ \frac{\varphi^{(p-1)}(-1)}{-1-t} - \frac{\varphi^{(p-1)}(1)}{1-t} \right\} + \\ &+ \frac{2!}{(p-1)!} \left\{ \frac{\varphi^{(p-2)}(-1)}{(-1-t)^2} - \frac{\varphi^{(p-2)}(1)}{(1-t)^2} \right\} + \dots + \frac{(p-4)!}{(p-1)!} \left\{ \frac{\varphi^{(4)}(-1)}{(-1-t)^{p-3}} - \frac{\varphi^{(4)}(1)}{(1-t)^{p-3}} \right\} + \\ &+ \frac{(p-3)!}{(p-1)!} \left\{ \frac{\varphi'(-1)}{(-1-t)^{p-2}} - \frac{\varphi'(1)}{(1-t)^{p-2}} \right\} + \frac{1}{(p-1)} \left\{ \frac{\varphi(-1)}{(-1-t)^{p-1}} - \frac{\varphi(1)}{(1-t)^{p-1}} \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t+ih)^p} = \frac{1}{(p-1)!} \int_{-1}^1 \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t+ih} d\tau + \frac{1!}{(p-1)!} \left\{ \frac{\varphi^{(p-1)}(-1)}{-1-t+ih} - \frac{\varphi^{(p-1)}(1)}{1-t+ih} \right\} + \\
& + \frac{2!}{(p-1)!} \left\{ \frac{\varphi^{(p-2)}(-1)}{(-1-t+ih)^2} - \frac{\varphi^{(p-2)}(1)}{(1-t+ih)^2} \right\} + \dots + \frac{(p-4)!}{(p-1)!} \left\{ \frac{\varphi''(-1)}{(-1-t+ih)^{p-3}} - \frac{\varphi''(1)}{(1-t+ih)^{p-3}} \right\} + \\
& + \frac{(p-3)!}{(p-1)!} \left\{ \frac{\varphi'(-1)}{(-1-t+ih)^{p-2}} - \frac{\varphi'(1)}{(1-t+ih)^{p-2}} \right\} + \frac{1}{(p-1)} \left\{ \frac{\varphi(-1)}{(-1-t+ih)^{p-1}} - \frac{\varphi(1)}{(1-t+ih)^{p-1}} \right\}; \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t-ih)^p} = \frac{1}{(p-1)!} \int_{-1}^1 \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t-ih} d\tau + \frac{1!}{(p-1)!} \left\{ \frac{\varphi^{(p-1)}(-1)}{-1-t-ih} - \frac{\varphi^{(p-1)}(1)}{1-t-ih} \right\} + \\
& + \frac{2!}{(p-1)!} \left\{ \frac{\varphi^{(p-2)}(-1)}{(-1-t-ih)^2} - \frac{\varphi^{(p-2)}(1)}{(1-t-ih)^2} \right\} + \dots + \frac{(p-4)!}{(p-1)!} \left\{ \frac{\varphi''(-1)}{(-1-t-ih)^{p-3}} - \frac{\varphi''(1)}{(1-t-ih)^{p-3}} \right\} + \\
& + \frac{(p-3)!}{(p-1)!} \left\{ \frac{\varphi'(-1)}{(-1-t-ih)^{p-2}} - \frac{\varphi'(1)}{(1-t-ih)^{p-2}} \right\} + \frac{1}{(p-1)} \left\{ \frac{\varphi(-1)}{(-1-t-ih)^{p-1}} - \frac{\varphi(1)}{(1-t-ih)^{p-1}} \right\}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Погрешность квадратурной формулы (2.5.2) оценивается неравенством

$$\begin{aligned}
|R_N| & \leq \left| \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\varphi}(t'_k) \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{1}{[\tau-(t-ih)]^p} + \frac{1}{[\tau-(t+ih)]^p} \right) d\tau \right] \right| \leq \\
& \leq \left| \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t+ih)^p} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t-ih)^p} \right| + \\
& + \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t+ih)^p} + \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t-ih)^p} - \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\varphi}(t'_k) \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{1}{[\tau-(t-ih)]^p} + \frac{1}{[\tau-(t+ih)]^p} \right) d\tau \right] \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left| \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t+ih)^p} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t-ih)^p} \right| + \\
& \quad + \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t+ih)^p} - \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\varphi}(t'_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{[\tau-(t+ih)]^p} \right| + \\
& \quad + \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t-ih)^p} - \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\varphi}(t'_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{[\tau-(t-ih)]^p} \right| \leq \\
& \leq \left| \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t+ih)^p} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t-ih)^p} \right| + \\
& \quad + \frac{1}{2} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t'_k)}{(\tau-t+ih)^p} d\tau \right| + \frac{1}{2} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t'_k)}{(\tau-t-ih)^p} d\tau \right| + \\
& \quad + \frac{1}{2} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \tilde{\varphi}(t'_k)}{(\tau-t+ih)^p} d\tau \right| + \frac{1}{2} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \tilde{\varphi}(t'_k)}{(\tau-t-ih)^p} d\tau \right| = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5.
\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Из формул (15) - (17) следует, что

$$r_1 = r_1^0 + r_1'(-1) + r_1'(1) + r_1''(-1) + r_1''(1) + \dots + r_1^{(p-1)}(-1) + r_1^{(p-1)}(1),$$

где

$$\begin{aligned}
r_1^0 &= \frac{1}{(p-1)!} \left[\int_{-1}^1 \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau-t} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau-t+ih} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau-t-ih} \right] = O(h); \\
r_1'(-1) &= \frac{2!}{(p-1)!} \left| \frac{\varphi^{(p-1)}(t_k)}{-1-t_k} - \frac{1}{2} \left[\frac{\varphi^{(p-1)}(t'_k)}{-1-t_k-ih} + \frac{\varphi^{(p-1)}(t'_k)}{-1-t_k+ih} \right] \right| = O(h); \\
r_1''(-1) &= \frac{3!}{(p-1)!} \left| \frac{\varphi^{(p-1)}(t_k)}{(-1-t_k)^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\varphi^{(p-1)}(t'_k)}{(-1-t_k-ih)^2} + \frac{\varphi^{(p-1)}(t'_k)}{(-1-t_k+ih)^2} \right] \right| = O(h); \\
& \dots \dots \dots \\
r_1^{(p-1)}(-1) &= \frac{1}{(p-1)!} \left| \frac{\varphi(t_k)}{(-1-t_k)^{p-1}} - \frac{1}{2} \left[\frac{\varphi(t'_k)}{(-1-t_k-ih)^{p-1}} + \frac{\varphi(t'_k)}{(-1-t_k+ih)^{p-1}} \right] \right| = O(h).
\end{aligned}$$

Легко показать, что

$$r_1^0 = \left| \int_{-1}^1 \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau-t} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t-ih} + \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t+ih} \right] d\tau \right| = O(h).$$

Следовательно, $r_1 = O(h)$.

Слагаемые r_4 и r_5 оцениваются по аналогии с соответствующими выражениями из пункта 2.4 в [1]. Повторяя сделанные там выкладки, имеем $r_5 \leq A\varepsilon/h^{p-1}$.

Слагаемые $r_2 - r_4$ оцениваются одинаково. Поэтому ограничимся рассмотрением суммы r_2 при $t \in [t_j, t_{j+1})$

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{1}{2} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|\varphi(\tau) - \varphi(t'_k)|}{|\tau-t+ih|^p} d\tau \right| \leq \frac{1}{4N^2} \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{\left((t_{k+1} - t_j)^2 + h^2 \right)^{p/2}} + \frac{1}{4N^2 h^p} + \\ &+ \frac{1}{4N^2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{1}{\left((t_k - t_{j+1})^2 + h^2 \right)^{p/2}} \leq A \left(\frac{1}{N^2 h^p} + \frac{1}{Nh^{p-1}} \right). \end{aligned}$$

Оценка сумм, встречающихся в предыдущем выражении, проводилась следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{\left[(t_{k+1} - t_j)^2 + h^2 \right]^{p/2}} = N^{p-2} \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{\left[(k+1-j)^2 + N^2 h^2 \right]^{p/2}} = \\ &= N^{p-2} \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{\left[(k+1-j)^2 + N^2 h^2 \right]^{p/2}} + N^{p-2} \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{\left[(k+1-j)^2 + N^2 h^2 \right]^{p/2}} = r_2^1 + r_2^2, \end{aligned}$$

где Σ' означает суммирование по таким k , что $j-k < Nh$, а Σ'' означает суммирование по остальным значениям k . Очевидно,

$$\begin{aligned} r_2^1 &\leq AN^{p-2} \sum_{k=j-[Nh]}^j \frac{1}{N^p h^p} \leq \frac{A}{N} h^{1-p}; \\ r_2^2 &\leq AN^{p-2} \sum_{k=0}^{j-[Nh]} \frac{1}{(j-k)^p} \leq AN^{p-2} (Nh)^{1-p} = \frac{Ah^{1-p}}{N}. \end{aligned}$$

Собирая полученные оценки, имеем $R_N \leq A \left(h + N^{-2} h^{-p} + N^{-1} h^{1-p} + \varepsilon/h^{p-1} \right)$.

Полагая $h = N^{-1/p}$, получаем окончательную оценку $R_N \leq A \left(N^{-1/p} + \varepsilon N^{1-1/p} \right)$.

Теорема доказана.

Практическая часть

В этой части курсовой работы необходимо представить листинг программы с графиками погрешности вычислений в виде таблиц. Далее приведены листинг и таблицы как образцы расчетов.

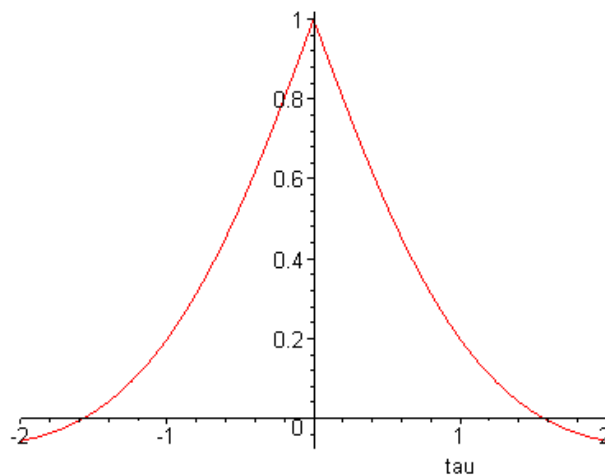
ЛИСТИНГ ПРОГРАММЫ. Вычисление первого интеграла.

```
> restart;
```

```
> z:=tau->exp(-abs(tau))*cos(tau);
```

$$z := \tau \rightarrow e^{(-\tau)} \cos(\tau)$$

```
> plot(z(tau), tau=-2..2);
```



```
> T:=0.5;
```

```
delta:=0.1;
```

```
h:=evalf(delta/10,1);
```

```
p:=2;
```

```
N:=(h)^(-p);
```

$T := .5$

$\delta := .1$

$h := .01$

$p := 2$

$N := 10000.$

```

> unassign('tau');
> simplify((((tau-T)-I*h)^p+((tau-T)+I*h)^p)/((tau-T)^2+h^2)^p);

$$20000 \cdot \frac{10000 \cdot \tau^2 - 10000 \cdot \tau + 2499}{(10000 \cdot \tau^2 - 10000 \cdot \tau + 2501)^2}$$

> Ker:=tau->20000.*(10000.*tau^2-10000.*tau+2499.)/(10000.*tau^2-10000.*tau+2501.)^2:
> int(Ker(tau),tau);

$$-1 \cdot \frac{20000 \cdot \tau - 10000}{10000 \cdot \tau^2 - 10000 \cdot \tau + 2501}$$

> Integ:=tau->-1.*(20000.*tau-10000.)/(10000.*tau^2-10000.*tau+2501.);

$$Integ := \tau \rightarrow -1 \cdot \frac{20000 \cdot \tau - 10000}{10000 \cdot \tau^2 - 10000 \cdot \tau + 2501}$$


```

```

> Phi:=evalf(taylor(z(tau), tau=1, 10 ));
Φ := .1987661104 - .5083259861(τ - 1.) + .3095598757(τ - 1.)2 - .03693125507
(τ - 1.)3 - .03312768507(τ - 1.)4 + .01694419953(τ - 1.)5 - .003439554174
(τ - 1.)6 + .0001758631195(τ - 1.)7 + .00007887544063(τ - 1.)8 -
.00002241296235(τ - 1.)9 + O((τ - 1.)10)
> Fi:=tau->(.1987661104-.5083259861*(tau-1.)+.3095598757*(tau-1.)^2-.3693125507e-1*(tau-1.)^3-.3312768507e-1*(tau-1.)^4+.1694419953e-1*(tau-1.)^5-.3439554174e-2*(tau-1.)^6+.1758631195e-3*(tau-1.)^7+.7887544063e-4*(tau-1.)^8-.2241296235e-4*(tau-1.)^9):

```

```
> Int(z(tau)/((tau-T)^p), tau=-1..1);
```

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{(-\tau)} \cos(\tau)}{(\tau-.5)^2} d\tau$$

```
> for i from 0 to N do t[i]:=-1+2*i/N od:
```

```
> i:='i':
```

```
> for i from 0 to N-1
```

```
do
```

```
  if (t[i]<=T) and (T<t[i+1]) then j:=i fi
```

```
od;
```

```
> j;
```

7500

```
> t_1[j]:=(t[j]+t[j+1])/2;
```

$t_{-I_{7500}} := .5001000000$

```
> k:='k';
```

$k := k$

```
> A:=1/2*Sum( Fi(t[k])*(Int( 1/(tau-(T-I*h))^p+1/(tau-(T+I*h))^p
, tau=t[k]..t[k+1])), k=0..j-2)
```

```
+1/2*Sum( Fi(t[k])*(Int( 1/(tau-(T-I*h))^p+1/(tau-(T+I*h))^p
, tau=t[k]..t[k+1])), k=j+2..N-1)
```

```
+1/2* Fi( t_1[j] )*(Int( 1/(tau-(T-I*h))^p+1/(tau-(T+I*h))^p
, tau=t[j-1]..t[j+2]));
```

$$A := \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{7498} (.7070920965 - .5083259861 t_k + .3095598757 (t_k - 1.)^2 - .03693125507 (t_k - 1.)^3 - .03312768507 (t_k - 1.)^4 + .01694419953 (t_k - 1.)^5 - .003439554174 (t_k - 1.)^6 + .0001758631195 (t_k - 1.)^7 + .00007887544063 (t_k - 1.)^8 - .00002241296235 (t_k - 1.)^9) \right. \\ \left. \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{(\tau-.5+.01I)^2} + \frac{1}{(\tau-.5-.01I)^2} d\tau \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=7502}^{9999} (.7070920965 - .5083259861 t_k + .3095598757 (t_k - 1.)^2 - .03693125507 (t_k - 1.)^3 - .03312768507 (t_k - 1.)^4 + .01694419953 (t_k - 1.)^5 - .003439554174 (t_k - 1.)^6 + .0001758631195 (t_k - 1.)^7 + .00007887544063 (t_k - 1.)^8) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & - .00002241296235 (t_k - 1.)^9 \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{1}{(\tau - .5 + .01 I)^2} + \frac{1}{(\tau - .5 - .01 I)^2} \right) d\tau \\
 & + .2660992120 \int_{.499800000}^{.500400000} \left(\frac{1}{(\tau - .5 + .01 I)^2} + \frac{1}{(\tau - .5 - .01 I)^2} \right) d\tau
 \end{aligned}$$

```

> A:=evalf(
1/2*sum( Fi(t[k])* (Integ(t[k+1]) -Integ(t[k])),k=0..j-2)
+1/2*sum( Fi(t[k])* (Integ(t[k+1]) -Integ(t[k])),k=j+2..N-1)
+1/2* Fi( t_1[j] )*(Integ(t[j+2]) -Integ(t[j-1])) ) ;
A := -.173478876

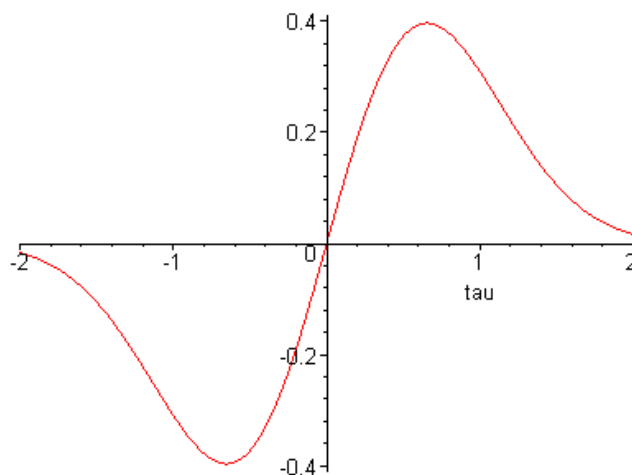
```

Вычисление второго интеграла.

```

> restart;
> z:=tau->exp(-tau^2)*sin(tau);
z := τ → e(-τ2) sin(τ)
➤ plot(z(tau),tau=-2..2);

```



```
> T:=0.7;
delta:=0.5;
h:=evalf(delta/5);
p:=4;
N:=(h)^(-p);
```

$T := .7$

$\delta := .5$

$h := .1000000000$

$p := 4$

$N := 10000.00000$

```
> unassign('tau');
```

```
> simplify((((tau-T)-I*h)^p+((tau-T)+I*h)^p)/((tau-T)^2+h^2)^p);
```

$$8. \frac{-7000. \tau^3 + 7200. \tau^2 - 3220. \tau + 527. + 2500. \tau^4}{(10. \tau^2 - 14. \tau + 5.)^4}$$

```
> Ker:=tau->8.*(-7000.*tau^3+7200.*tau^2-
3220.*tau+527.+2500.*tau^4)/(10.*tau^2-14.*tau+5.)^4:
```

```
> int(Ker(tau),tau);
```

$$1.333333333 \frac{20. \tau - 14.}{(10. \tau^2 - 14. \tau + 5.)^3} - \frac{3.333333333 (20. \tau - 14.)}{(10. \tau^2 - 14. \tau + 5.)^2}$$

```
> Integ:=tau->1.333333333*(20.*tau-14.)/(10.*tau^2-14.*tau+5.)^3-
3.333333333*(20.*tau-14.)/(10.*tau^2-14.*tau+5.)^2;
```

$$Integ := \tau \rightarrow 1.333333333 \frac{20. \tau - 14.}{(10. \tau^2 - 14. \tau + 5.)^3} - \frac{3.333333333 (20. \tau - 14.)}{(10. \tau^2 - 14. \tau + 5.)^2}$$

```
> Phi:=evalf(taylor(z(tau), tau=1., 10));
```

$$\Phi := .3095598757 - .4203536410(\tau - 1.) - .2427522830(\tau - 1.)^2 + .6815715516(\tau - 1.)^3 - .2010820625(\tau - 1.)^4 - .3054556827(\tau - 1.)^5 + .2084145935(\tau - 1.)^6 + .05066008283(\tau - 1.)^7 - .08270287518(\tau - 1.)^8 + .00594298734(\tau - 1.)^9 + O((\tau - 1.)^{10})$$

```
> Fi:=tau->(.3095598757-.4203536410*(tau-1.)-.2427522830*(tau-1.)^2+.6815715516*(tau-1.)^3-.2010820625*(tau-1.)^4-.3054556827*(tau-1.)^5+.2084145935*(tau-1.)^6+.5066008283e-1*(tau-1.)^7-.8270287518e-1*(tau-1.)^8+.594298734e-2*(tau-1.)^9):
```

```
> Int(z(tau)/((tau-T)^p),tau=-1..1);
```

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{(-\tau^2)} \sin(\tau)}{(\tau - .7)^4} d\tau$$

```
> for i from 0 to N do t[i]:=-1+2*i/N od:
> i:='i':
> for i from 0 to N-1
do
  if (t[i]<=T) and (T<t[i+1]) then j:=i fi
od;
> j;
```


8500

$$\begin{aligned} > t_1[j] := (t[j] + t[j+1]) / 2; \\ t_I_{8500} := .7001000000 \end{aligned}$$

> k:='k';

$$k := k$$

```
> A:=1/2*Sum( Fi(t[k])*(Int( 1/(tau-(T-I*h)) ^p+1/(tau-(T+I*h)) ^p
,tau=t[k]..t[k+1])),k=0..j-2)
+1/2*Sum( Fi(t[k])*(Int( 1/(tau-(T-I*h)) ^p+1/(tau-(T+I*h)) ^p
,tau=t[k]..t[k+1])),k=j+2..N-1)
+1/2* Fi( t_1[j] )*(Int( 1/(tau-(T-I*h)) ^p+1/(tau-(T+I*h)) ^p
,tau=t[j-1]..t[j+1]));
```

$$\begin{aligned} A := & \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{8498} (.7299135167 - .4203536410 t_k - .2427522830 (t_k - 1.)^2 \right. \\ & + .6815715516 (t_k - 1.)^3 - .2010820625 (t_k - 1.)^4 - .3054556827 (t_k - 1.)^5 \\ & + .2084145935 (t_k - 1.)^6 + .05066008283 (t_k - 1.)^7 - .08270287518 (t_k - 1.)^8 \\ & \left. + .00594298734 (t_k - 1.)^9 \right) \\ & \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{(\tau - .7 + .1000000000 I)^4} + \frac{1}{(\tau - .7 - .1000000000 I)^4} d\tau \Bigg) + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=8502}^{9999.00000} \left(\right. \right. \\ & .7299135167 - .4203536410 t_k - .2427522830 (t_k - 1.)^2 + .6815715516 (t_k - 1.)^3 \\ & - .2010820625 (t_k - 1.)^4 - .3054556827 (t_k - 1.)^5 + .2084145935 (t_k - 1.)^6 \\ & + .05066008283 (t_k - 1.)^7 - .08270287518 (t_k - 1.)^8 + .00594298734 (t_k - 1.)^9 \\ & \left. \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{(\tau - .7 + .1000000000 I)^4} + \frac{1}{(\tau - .7 - .1000000000 I)^4} d\tau \right) \\ & + .1973281150 \int_{.699800000}^{.700400000} \frac{1}{(\tau - .7 + .1000000000 I)^4} + \frac{1}{(\tau - .7 - .1000000000 I)^4} d\tau \end{aligned}$$

Окончание

```
> A:=evalf(  
1/2*sum( Fi(t[k])*(Integ(t[k+1])-Integ(t[k])),k=0..j-2)  
+1/2*sum( Fi(t[k])*(Integ(t[k+1])-Integ(t[k])),k=j+2..N-1)  
+1/2* Fi( t_1[j] )*(Integ(t[j+2])-Integ(t[j-1])) ) ;  
A := -.293748184
```

РЕЗУЛЬТАТ РАБОТЫ ПРОГРАММЫ.

Для интеграла $\int_{-1}^1 \frac{e^{-|\tau|} \cos \tau}{(\tau - 0.5)^2} d\tau$.

Особая точка: $\tau = 0.5$.

Число N	Величина δ	Номер ближайшего к особой точке узла.	Величина $h = N^{-1/p}$	Вычисленное значение интеграла.
25	0.9	18	0.18	-0.380255907
100	0.9	75	0.1	-0.280656983
1600	0.3	1200	0.025	-0.173471231
10000	0.1	7500	0.01	-0.173478876

Для интеграла $\int_{-1}^1 \frac{e^{-\tau^2} \sin \tau}{(\tau - 0.7)^4} d\tau$.

Особая точка: $\tau = 0.7$.

Число N	Величина δ	Номер ближайшего к особой точке узла.	Величина $h = N^{-1/p}$	Вычисленное значение интеграла.
256	0.5	217	0.25	1.578748964
625	0.8	531	0.2	1.357507793
4096	0.5	3481	0.125	1.324345453
10000	0.5	8500	0.1	1.29654578

ВЫВОД: В ходе выполнения работы Я ознакомился с эффективным методом вычисления интегралов Адамара на конечном интервале. Этот метод был реализован на компьютере с помощью программы Maple7. Данный метод прост в реализации, однако очень трудоемок. Работа данного метода очень сильно зависит от количества выбранных узлов N и от величины δ . С увеличением числа узлов, точность метода увеличивается, также как и время, необходимое для вычисления интеграла. Погрешность квадратурной формулы имеет порядок $O(N^{-1/p})$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бойков И.В., Добрынина Н.Ф., Домнин Л.Н. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Изд-во Пенз.гос.универ-та., 1996.-188с., библиогр. 109 назв.

Программа учебной дисциплины

Программа разработана на основе программы курса высшей математики для инженерно-математических специальностей, предыдущих программ кафедры ВиПМ с учетом стандарта по специальности.

1. Область применения

Настоящая программа устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности по дисциплине «Квадратурные формулы» специальности 657100 «Прикладная математика».

2. Календарь практических занятий и лабораторных работ

Трудоемкость дисциплины в часах, исходя из 17-недельного семестра:

Общая	136/6
Обязательная аудиторная:	102/5
лекции	34/2
лабораторные занятия	34/2
практические занятия	34/2
семинары	не предусмотрены
Самостоятельная работа студента:	34/2
аудиторная	не предусмотрена
внеаудиторная	34/2
в т.ч. курсовая работа	34/2
Контроль:	
текущий на занятиях	
защита курсовой работы с оценкой	
зачет	
сдача экзамена	

Сводные данные об основных разделах дисциплины и распределении часов по видам занятий:

Название раздела	Количество часов занятий				Уровень изучения
	Аудиторных			Самостоятельных	
	Лекции	Практи	Лаборат		
Квадратурные суммы. Интерполяционные Квадратуры. Квадратуры наивысшей алгебраической точности.	8	8	8	8	В
Квадратуры с наименьшей оценкой остатка. Формулы, содержащие наперед заданные узлы. Квадратуры с равными коэффициентами.	10	10	10	10	В
Увеличение точности квадратур. Сходимость квадратурного процесса.	6	6	6	6	В
Кратное Интегрирование.	4	4	4	4	В
Метод декартовых произведений. Метод статистических испытаний	6	6	6	6	В

Темы занятий

- Квадратурные суммы и задачи с ними связанные. Остаток приближенной квадратуры и его представление – 2 часа.

- Интерполяционные квадратуры. Формулы Ньютона-Котеса. Простейшие формулы Ньютона-Котеса – 2 часа.

- Квадратуры наивысшей алгебраической степени точности. Общие теоремы. Постоянная весовая функция. Интегралы с различными весовыми функциями -4 часа.

- Квадратуры с наименьшей оценкой остатка. Задача минимизации остатка квадратуры. Минимизация остатка на различных классах функций. Задача минимизации оценки остатка квадратуры с закрепленными узлами – 4 часа.

- Квадратурные формулы, содержащие наперед заданные узлы. Формулы частного вида. Вычисление интегралов со знакопеременной весовой функцией – 4 часа.

- Квадратурные формулы с равными коэффициентами. Нахождение узлов. Единственность квадратурной формулы наивысшей алгебраической точности с равными коэффициентами. Интегралы с постоянной весовой функцией – 4 часа.

- Увеличение точности квадратур. О двух направлениях в задаче увеличения точности. Ослабление особенности интегрируемой функции. Методы Эйлера разложения остатка квадратуры – 2 часа.

- Сходимость квадратурного процесса. Сходимость интерполяционных квадратур для аналитических функций. Сходимость общего квадратурного процесса – 4 часа.

- Построение формул кратного интегрирования. Метод ячеек. Повторное применение квадратурных формул. Построение кубатурных формул на основе интерполяционных многочленов. Симметричные кубатурные формулы – 4 часа.

- Перенесение правил интегрирования на различные области. Преобразование одной области интегрирования в другую. Метод декартовых произведений – 2 часа.

- Метод статистических испытаний. Случайные величины. Равномерно распределенная величина. Оценка погрешности численного интегрирования

на равномерной сетке. Оценка снизу погрешности численного интегрирования. Метод Монте-Карло. Ускорение сходимости метода Монте-Карло – 4 часа.

Форма проведения лекций – аудиторная.

Практические занятия

- Простейшие квадратурные формулы – 4 часа.
- Точная оценка приближения квадратурной формулы – 4 часа.
- Усложненные квадратурные формулы – 4 часа.
- Оценка для многомерных квадратурных формул – 4 часа.
- Наилучшая квадратурная формула с равноотстоящими узлами – 4 часа.
- Общая экстремальная задача – 6 часов.
- Результаты, полученные путем оценки остатка на функциях обращающих в нуль квадратурную формулу – 4 часа.
- Оптимальные квадратурные формулы с фиксированными узлами – 4 часа.

Форма проведения практических занятий – аудиторная.

Лабораторные работы

- Квадратурные формулы Ньютона-Котеса – 4 часа.
- Квадратурные формулы Гаусса – 4 часа.
- Повышение точности интегрирования за счет неравномерного разбиения – 8 часов.
- Оптимизация узлов квадратурной формулы – 4 час.
- Уточнение результата интерполяцией более высокого порядка – 6 часов.
- Метод Монте-Карло в применении к вычислению двойного интеграла - 8 часов.

Форма проведения лабораторных работ – компьютерная лаборатория.

Курсовая работа

- Вычисление сингулярных и гиперсингулярных интегралов – 17 часов.

Форма выполнения курсовой работы – самостоятельная, консультации преподавателя.

График самостоятельной работы студентов по дисциплине «Квадратурные формулы» (34 часа)

1. Квадратурные суммы – 2 часа.
2. Интерполяционные квадратуры – 3 часа.
3. Квадратуры наивысшей алгебраической точности - 3 часа.
4. Квадратуры с наименьшей оценкой остатка – 4 часа.
5. Квадратурные формулы, содержащие наперед заданные узлы – 3 часа.
6. Квадратурные формулы с равными коэффициентами – 3 часа.
7. Увеличение точности квадратур – 3 часа.
8. Сходимость квадратурного процесса – 3 часа.
9. Кратное интегрирование – 4 часа.
10. Метод декартовых произведений – 3 часа.
11. Метод статистических испытаний – 3 часа.

Список литературы

1. Крылов, В.И. Приближенное вычисление интегралов / В.И.Крылов. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 327с.
2. Бойков, В.И. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решения гиперсиггулярных интегральных уравнений: монография / И.В. Бойков, Н.Ф. Добрынина, Л.Н.Домнин. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 1996. – 188с.
3. Никольский, С.М. Квадратурные формулы / С.М. Никольский.- М.: Наука, 1988.-255с.
4. Добрынина, Н.Ф. Численное интегрирование: конспект лекций / Н.Ф. Добрынина. - Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2004. – 65с.
5. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 630с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Темы для курсового проектирования по курсу «Квадратурные формулы»

1. Квадратурные формулы для вычисления интегралов Адамара с переменной сингулярностью на классах периодических функций.

$$1. \int_0^{2\pi} \frac{e^\sigma}{\sin^2 \frac{\sigma-1}{2}} d\sigma, \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^\sigma}{\sin^4 \frac{\sigma-1}{2}} d\sigma;$$

$$2. \int_0^{2\pi} \frac{e^\sigma}{\cos^2 \frac{\sigma-1}{2}} d\sigma, \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^\sigma}{\cos^4 \frac{\sigma-1}{2}} d\sigma;$$

$$3. \int_0^{2\pi} \frac{e^\sigma}{\sin \frac{\sigma-1}{2} \cos \frac{\sigma-1}{2}} d\sigma, \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^\sigma}{\sin^2 \frac{\sigma-1}{2} \cos^2 \frac{\sigma-1}{2}} d\sigma;$$

$$4. \int_0^{2\pi} \frac{e^{2\sigma}}{\sin^2 \frac{\sigma-\pi}{3}} d\sigma, \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{2\sigma}}{\cos^2 \frac{\sigma-\pi}{3}} d\sigma.$$

2. Интегралы Адамара с переменной сингулярностью на бесконечном интервале.

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^{-|\tau|} e^\tau}{(\tau-1)^2} d\tau, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} e^\tau}{(\tau-2)^4} d\tau;$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3^{-|\tau|} \cos \tau}{(\tau-3)^2} d\tau, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \sin \tau}{(\tau-4)^4} d\tau;$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^{-|\tau|} \sin \tau}{(\tau-2)^2} d\tau, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \cos \tau}{(\tau-3)^4} d\tau;$$

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^{-|\tau|} \sin \tau}{(\tau-1)^2} d\tau, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \cos \tau}{(\tau-4)^4} d\tau.$$

3. Эффективный метод вычисления интегралов Адамара на конечном интервале.

$$\begin{aligned}
 1. & \int_{-1}^1 \frac{e^{-|\tau|} \cos \tau}{(\tau-0,5)^2} d\tau, & \int_{-1}^1 \frac{e^{-\tau^2} \sin \tau}{(\tau-0,7)^4} d\tau; \\
 2. & \int_{-2}^2 \frac{e^{-|\tau|} \sin \tau}{(\tau-1)^2} d\tau, & \int_{-2}^2 \frac{e^{\tau} e^{-\tau^2}}{(\tau-1,5)^4} d\tau; \\
 3. & \int_{-1}^1 \frac{e^{-\tau^2} \cos \tau}{(\tau+0,5)^2} d\tau, & \int_{-2}^2 \frac{e^{-|\tau|} \sin \tau}{(\tau-1,2)^4} d\tau; \\
 4. & \int_{-1}^1 \frac{e^{-\tau^2} \sin \tau}{(\tau-0,3)^2} d\tau, & \int_{-2}^2 \frac{e^{-|\tau|} \cos \tau}{(\tau-1,7)^4} d\tau.
 \end{aligned}$$

4. Эффективный метод вычисления интегралов Адамара на бесконечном интервале.

$$\begin{aligned}
 1. & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^{-|\tau|} \cos \tau}{(\tau-3)^2} d\tau, & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \sin \tau}{(\tau-1)^4} d\tau; \\
 2. & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3^{-|\tau|} e^{\tau}}{(\tau-2)^2} d\tau, & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \cos \tau}{(\tau-3)^4} d\tau; \\
 3. & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^{-|\tau|} e^{\tau}}{(\tau-3)^2} d\tau, & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \cos \tau}{(\tau-1)^4} d\tau; \\
 4. & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3^{-|\tau|} e^{\tau}}{(\tau-1)^2} d\tau, & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \sin \tau}{(\tau-2)^4} d\tau.
 \end{aligned}$$

5. Оптимальные кубатурные формулы для вычисления двойных интегралов Адамара от периодических функций.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \sigma_1}{\sin^2 \frac{\sigma_1 - \frac{\pi}{3}}{2} \sin^2 \frac{\sigma_2 - \frac{\pi}{2}}{2}} d\sigma_1 d\sigma_2, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \sigma_2}{\sin^4 \frac{\sigma_1 - \frac{\pi}{2}}{2} \sin^2 \frac{\sigma_2 - \frac{\pi}{6}}{2}} d\sigma_1 d\sigma_2; \\
 2. \quad & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \sigma_1}{\sin^2 \frac{\sigma_1 - \frac{\pi}{6}}{2} \sin^2 \frac{\sigma_2 - \frac{\pi}{2}}{2}} d\sigma_1 d\sigma_2, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \sigma_2}{\sin^2 \frac{\sigma_1 - \frac{\pi}{3}}{2} \sin^4 \frac{\sigma_2 - \frac{\pi}{2}}{2}} d\sigma_1 d\sigma_2; \\
 3. \quad & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \sigma_2}{\sin^2 \frac{\sigma_1 - \frac{\pi}{3}}{2} \cos^2 \frac{\sigma_2 - \frac{\pi}{2}}{2}} d\sigma_1 d\sigma_2, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \sigma_2}{\sin^2 \frac{\sigma_1 - \frac{\pi}{6}}{2} \cos^4 \frac{\sigma_2 - \frac{\pi}{3}}{2}} d\sigma_1 d\sigma_2.
 \end{aligned}$$

6. Кубатурные формулы для вычисления интеграла Адамара на топологическом произведении конечных интервалов.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\cos \tau_1 \cos \tau_2}{(\tau_1 - 0,5)^2 (\tau_2 - 0,75)^2} d\tau_1 d\tau_2, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sin \tau_1 \sin \tau_2}{(\tau_1 - 0,3)^4 (\tau_2 - 0,4)^2} d\tau_1 d\tau_2; \\
 2. \quad & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\cos \tau_1 \sin \tau_2}{(\tau_1 - 0,1)^2 (\tau_2 - 0,2)^2} d\tau_1 d\tau_2, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sin \tau_1 \cos \tau_2}{(\tau_1 - 0,3)^2 (\tau_2 - 0,4)^4} d\tau_1 d\tau_2; \\
 3. \quad & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sin \tau_1 \sin \tau_2}{(\tau_1 - 0,6)^2 (\tau_2 - 0,1)^2} d\tau_1 d\tau_2, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\cos \tau_1 \sin \tau_2}{(\tau_1 - 0,2)^4 (\tau_2 - 0,5)^2} d\tau_1 d\tau_2.
 \end{aligned}$$

7. Кубатурные формулы для вычисления интегралов Адамара на топологическом произведении двух бесконечных контуров.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau_1^2 - \tau_2^2} \cos \tau_1}{(\tau_1 - 1)^2 (\tau_2 - 2)^2} d\tau_1 d\tau_2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau_1 - \tau_2} \sin \tau_2}{(\tau_1 - 2)^2 (\tau_2 - 1)^4} d\tau_1 d\tau_2; \\
 2. \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau_1^2 - \tau_2^2} \sin \tau_1}{(\tau_1 - 1)^2 (\tau_2 - 1)^2} d\tau_1 d\tau_2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau_1 - \tau_2} \cos \tau_2}{(\tau_1 - 2)^4 (\tau_2 - 2)^2} d\tau_1 d\tau_2; \\
 3. \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau_1 - \tau_2} \cos \tau_1}{(\tau_1 - 3)^2 (\tau_2 - 1)^2} d\tau_1 d\tau_2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau_1^2 - \tau_2^2} \sin \tau_2}{(\tau_1 - 1)^4 (\tau_2 - 3)^2} d\tau_1 d\tau_2.
 \end{aligned}$$

Вопросы к экзамену «Квадратурные формулы»

1. Квадратурные суммы и задачи с ними связанные. Остаток приближенной квадратуры.
2. Приближенное интегрирование периодических функций.
3. Остаток квадратурной формулы и его представления.
4. Интерполяционные квадратуры и их остаточные члены.
5. Формулы Ньютона-Котеса.
6. Простейшие формулы Ньютона-Котеса.
7. Квадратуры наивысшей алгебраической степени точности. Общие теоремы.
8. Квадратуры наивысшей алгебраической степени точности. Постоянная весовая функция.
9. Квадратуры наивысшей алгебраической степени точности. Интегралы вида $\int_a^b (b-x)^\alpha (x-a)^\beta f(x) dx$.
10. Квадратуры наивысшей алгебраической степени точности. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx$.
11. Квадратуры наивысшей алгебраической степени точности. Интегралы вида $\int_0^{\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) dx$.
12. Задача минимизации остатка квадратуры.
13. Минимизация остатка на классах $L_q^{(r)}$.
14. Минимизация остатка на классах C_r .
15. Задача минимизации оценки остатка квадратуры с закрепленными концами.
16. Квадратурные формулы, содержащие наперед заданные узлы. Общие теоремы.
17. Квадратурные формулы, содержащие наперед заданные узлы. Формулы частного вида.
18. Квадратурные формулы, содержащие наперед заданные узлы. Вычисление интеграла со знакопеременной весовой функцией.
19. Квадратурные формулы с равными коэффициентами.
20. Единственность квадратурной формулы наивысшей алгебраической точности с равными коэффициентами.
21. Интегралы с постоянной весовой функцией.
22. О двух направлениях в задаче увеличения точности.
23. Ослабление особенности интегрируемой функции.
24. Эйлеровы методы разложения остатка квадратуры.

25. Увеличение точности квадратуры.
26. Проблемы сходимости квадратурного процесса.
27. Сходимость интерполяционных квадратур для аналитических функций.
28. Построение формул кратного интегрирования. Метод ячеек.
29. Построение формул кратного интегрирования. Повторное применение квадратурных формул.
30. Построение кубатурных формул на основе интерполяционных многочленов.
31. Об общей задаче выбора параметров в правиле вычисления кратных интегралов.
32. Симметричные кубатурные формулы.
33. Преобразование одной области интегрирования в другую.
34. Метод декартовых произведений.
35. Случайные величины. Равномерно распределенная величина.
36. Оценка погрешности численного интегрирования на равномерной сетке.
37. Оценка снизу погрешности численного интегрирования.
38. Метод Монте-Карло.
39. Ускорение сходимости метода Монте-Карло.

СОДЕРЖАНИЕ

Постановка задачи.....	3
Теоретическая часть.....	4
1. Определение интеграла Адамара.....	4
2. Постановка задачи построения оптимальной квадратурной формулы.....	8
3. Классы функций.....	11
4. Эффективный метод вычисления интегралов Адамара на конечном интервале.....	14
Практическая часть.....	19
Листинг программы.....	19
Результат работы программы.....	27
Программа учебной дисциплины.....	28
Список литературы.....	33
Приложения.....	34

Эффективный метод вычисления
интеграла Адамара
на конечном интервале

Методические указания
к курсовой работе

Редактор *Т.В. Веденеева*
Технический редактор *Н.А. Вьялкова*
Корректор *Н.А. Сидельникова*
Компьютерная верстка *С.П. Черновой*

ИД №06494 от 26.12.01

Сдано в производство 21.02.07. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,32.
Уч. –изд. л. 2,77. Тираж 100. Заказ № 114. «С» 17.

Издательство Пензенского государственного университета.
440026, Пенза, Красная, 40

